Plenums-Aufgaben zu Mathematik I (KTWW)

(1) Logarithmen und Exponentialfunktion

(a) Für welche reelle Zahl x gilt

$$2^x = 5\ ?$$

(Genauigkeit: durchwegs 4 Dezimalstellen.)

(b) Interpretieren Sie diese Aufgabe auch graphisch: Skizzieren Sie den Funktionsgraphen $y = 2^x$ und bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der waagrechten Geraden $y = 5$.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{3^{x+2} - 2}{3^x + 4} = \frac{8}{3}$$

und führen Sie die Probe durch.

(d) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0\,.$$

(e) Die Zahl a sei gegeben durch die Identität $\lg a = 0.75$ [lg bezeichnet durchwegs den dekadischen Logarithmus.] Berechnen Sie daraus (direkt, mittels Rechenregeln für Logarithmen) die Werte $\lg \sqrt[3]{a^2}$ und $\lg \left(\frac{1}{\sqrt[6]{a}} \right)$.

(f) Alternativer Lösungsweg: Bestimmen Sie a aus der Gleichung $\lg a = 0.75$ und berechnen Sie mit dem Taschenrechner numerisch $\lg \sqrt[3]{a^2}$ und $\lg \left(\frac{1}{\sqrt[6]{a}} \right)$.

(2) Newton'sches Abkühlungsgesetz

(a) Beim Abstellen eines Motors (z.B. Kfz) hat dessen Kühlflüssigkeit eine Temperatur von 55° C, nach einer Stunde nur mehr 12° C. Die Umgebungstemperatur beträgt konstant -20° C.

(i) Bestimmen Sie die Halbwertszeit H dieses Abkühlvorganges.
(ii) Nach welcher Zeit wird eine Temperatur von -10° C erreicht? (Frostschutzproblematik!)

(b) Ein Werkstück aus Metall hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 1250° C (Weißglut), 5 Minuten später nur mehr 720° C (Rotglut), bei einer Umgebungstemperatur von $+10^\circ$ C.
Bestimmen Sie die Halbwertszeit H und stellen Sie Abkühlungsfunktion $T = T(t)$ graphisch dar, mit den Stützstellen $t = 10, 20, 40, 60$ Minuten.

(3) Gradmaß und Bogenmaß von Winkeln

(a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Gradmaß		120°		200°		75°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$	

(b) Stellen Sie die Winkeln dieser Tabelle in einem kartesischen Koordinatensystem durch Halbgerade vom Ursprung aus dar. (Null-Richtung ist die positive x-Achse.)

(4) Winkelfunktionen und rechtwinkeliges Dreieck

(a) Von einem rechtwinkeligen Dreieck ABC [rechter Winkel immer bei C] kennt man die Hypotenuse $c = 15$ cm und eine Kathete $a = 12$ cm. Berechnen Sie die Winkeln α, β, im Gradmaß und Bogenmaß, sowie die zweite Kathete b.

(b) Von einem andern rechtwinkeligen Dreieck ABC sind der Winkel $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ (Bogenmaß!) und die Kathete $b = 20$ cm gegeben. Berechnen Sie die Seiten a, c und den Winkel β.

(5) Gleichungen mit Winkelfunktionen ("Goniometrie")

(a) Bestimmen Sie *alle* Lösungen der Gleichung

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\,.$$

Anleitung: (i) Für welches α mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt $\cos\alpha = \frac{1}{2}$?
(ii) Vgl. Skriptum S. 10: Welche α mit $0 \le \alpha \le 2\pi$ haben denselben Kosinus-Wert? (iii) Verwenden Sie die Periodizität des Kosinus, um *alle* Lösungen zu erhalten.

(b) Lösen Sie ganz analog die Gleichung

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\,.$$

(6) Funktionsgraphen

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen (auf einem "repräsentativen" Bereich). Dabei sollte nicht nur mit einer Wertetabelle hantiert werden, sondern auch der *qualitative Verlauf* der Kurve verstanden und eingeprägt werden.

(a)
$$y = f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 4}$$

Diese Kurve besitzt Asymptoten! (Wo befindet sich eine Polstelle? Was passiert für $x \to \pm\infty$?)

(a*) Zeichnen Sie ebenso den Graphen von

$$y = f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Wie entsteht dieser aus dem „Original" $y = \sqrt{x}$?

Definition (vgl. Skriptum S. 3 Mitte): Für **positives** $b \in \mathbb{R}$ und positives ganzes q ist $a = \sqrt[q]{b}$ jene **positive** Zahl a für die gilt: $a^q = b$.

(b) $$y = f(x) = \lg(2x)$$

Vergleichen Sie mit der Kurve $y = \lg x$ (Skriptum I, S. 19). Wie könnte man die Entstehung unserer Kurve aus diesem "Original" beschreiben? (Zwei Möglichkeiten: Beachten Sie $\lg(2x) = \lg x + \lg 2$.)

(c) $$y = f(x) = \cos^2 x$$

Verwenden Sie das Additionstheorem für $\cos(2x)$ und "Pythagoras". Wie hängt diese Kurve mit dem "Original-Kosinus" zusammen? (Vgl. Skriptum S. 20.)

(d)

$$y = f(x) = 2^{1-x}$$

Wie hängt diese Kurve mit der Original-Exponentialkurve $y = 2^{-x}$ zusammen?

(7) Tangentengleichung. Ableitung von Funktionen.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Hyperbel

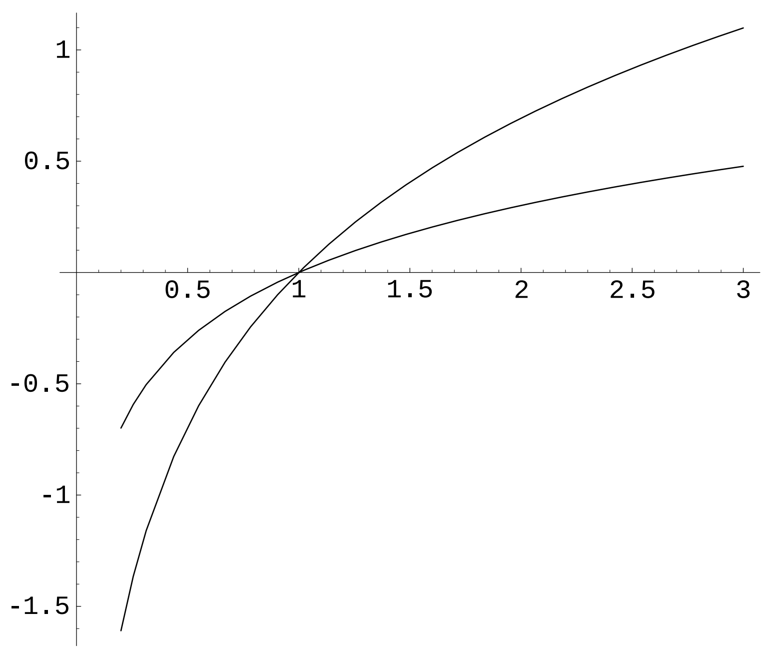
$$C: \quad y = \frac{2}{x}$$

im Punkt $P = (2,1)$. Zeichnen Sie die Kurve und die Tangente.

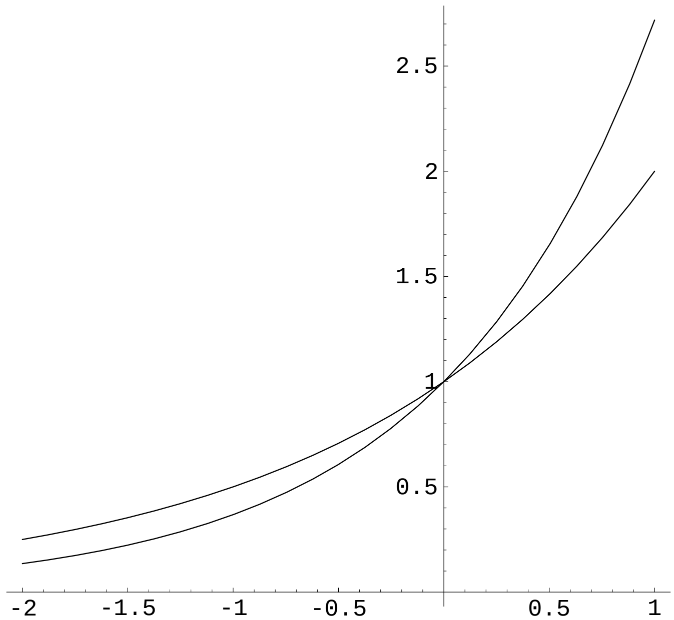
*Bei dieser Aufgabe wurde verwendet, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ besitzt. Verifizieren Sie diese Tatsache (für jedes feste $a \neq 0$) direkt mit Hilfe der Leibniz'schen Grenzwertdefinition der Ableitung

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Tangentengleichungen im Punkt $P = (1,0)$ an die beiden Logarithmuskurven $C_1: \quad y = \ln x$ und $C_2: \quad y = \lg x$. Zeichnen Sie die beiden Tangenten in das Bild von C_1, C_2 ein.



(c) Bestimmen Sie ebenso die Gleichungen der Tangenten im Punkt $P = (0,1)$ an die beiden Exponentialkurven $y = e^x$ und $y = 2^x$. Tragen Sie auch diese Tangenten in das folgende Bild ein.



(d) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion

$$f(x) = 3^x \sqrt{x} + \cos x \, \ln x \qquad \text{(Produktregel!)}$$

(e) Berechnen Sie ebenso die Ableitung von

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \, \lg x}{x^2 + e^x \cos x} \, . \qquad \text{(Quotientenregel!)}$$

(f) Differenzieren Sie mit Hilfe der Kettenregel die Funktionen

$$f_1(x) = \sin\left(x^2 + \ln x\right) , \qquad f_2(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + e^{-x}} \, .$$

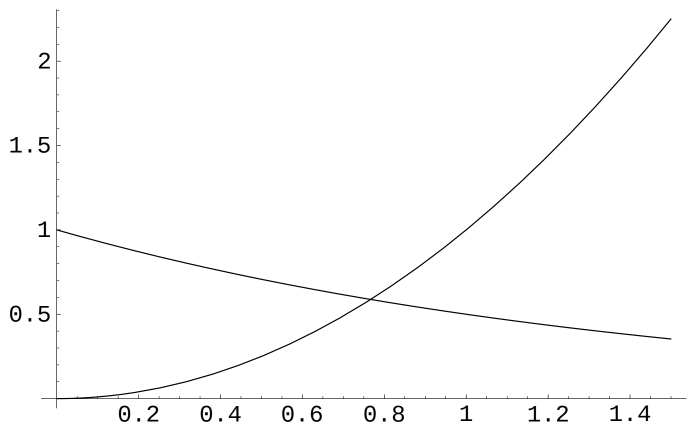
(g) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \arctan(x^3)\, 3^x + \tan(2x) \arcsin(\sqrt{x}) \, .$$

(8) Das Verfahren von Newton.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton'schen Verfahrens *numerisch* (Genauigkeit: 4 Dezimalstellen) die Lösung der Gleichung

$$x^2 = 2^{-x}\,.$$



Die Kurven $y = x^2$ und $y = 2^{-x}$

Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt die Lösung?

Verwenden Sie $x_1 = 0.5$ als Startwert und berechnen Sie Werte $x_2, x_3, \ldots$ nach der Newton'schen Rekursionsformel

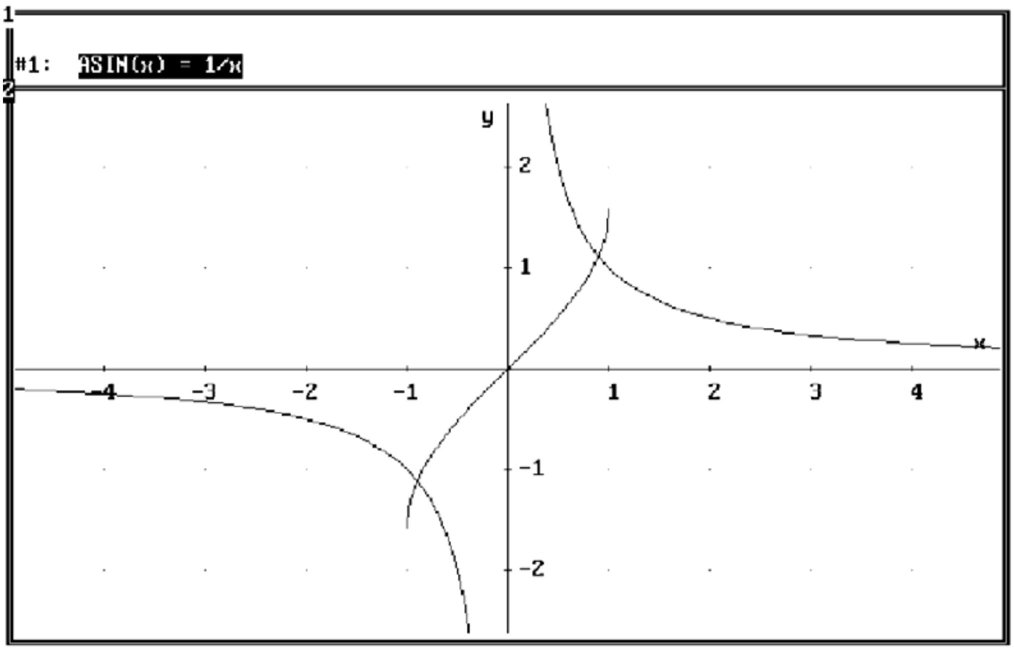
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

(8b) Bestimmen Sie nach dem Verfahren von Newton die *positive*[*] Lösung der Gleichung

$$\arcsin(x) = \frac{1}{x}$$

auf 4 Dezimalstellen genau.

- Skizzieren Sie zunächst die Graphen von $y = \arcsin(x)$ und $y = \frac{1}{x}$.



- Wie lautet die Rekursionsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für diese Aufgabe?
- Beginnen Sie mit $x_1 = 0.5$ und berechnen Sie der Reihe nach $x_2,\ x_3,\ \ldots$

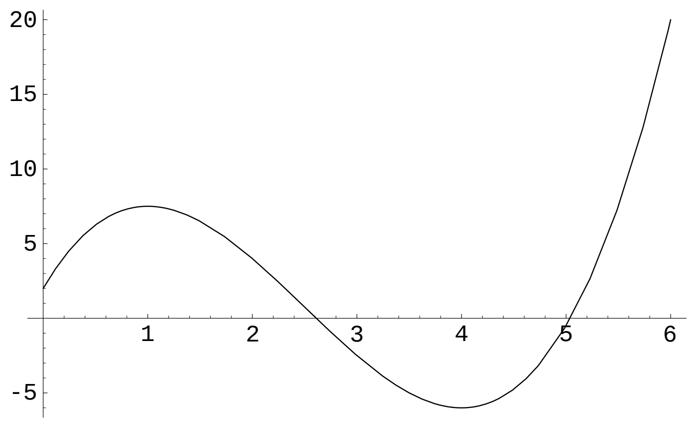
[*] Diese Bedingung ist auch in der Angabe 8a zu ergänzen. Man sieht leicht, dass die Gleichung von Aufgabe 8a auch die *negativen* Lösungen -4 und -2 besitzt.

(9) Absolute Extremwerte einer Funktion auf einem Intervall.

(a) Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert, den die Funktion

$$f(x) = x^3 - 7.5\,x^2 + 12x + 2$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq 6$ annimmt.



(9b) Wiederholungsaufgabe zu „*absolute Extremwerte*" ~~und „*Newton-Verfahren*"~~:

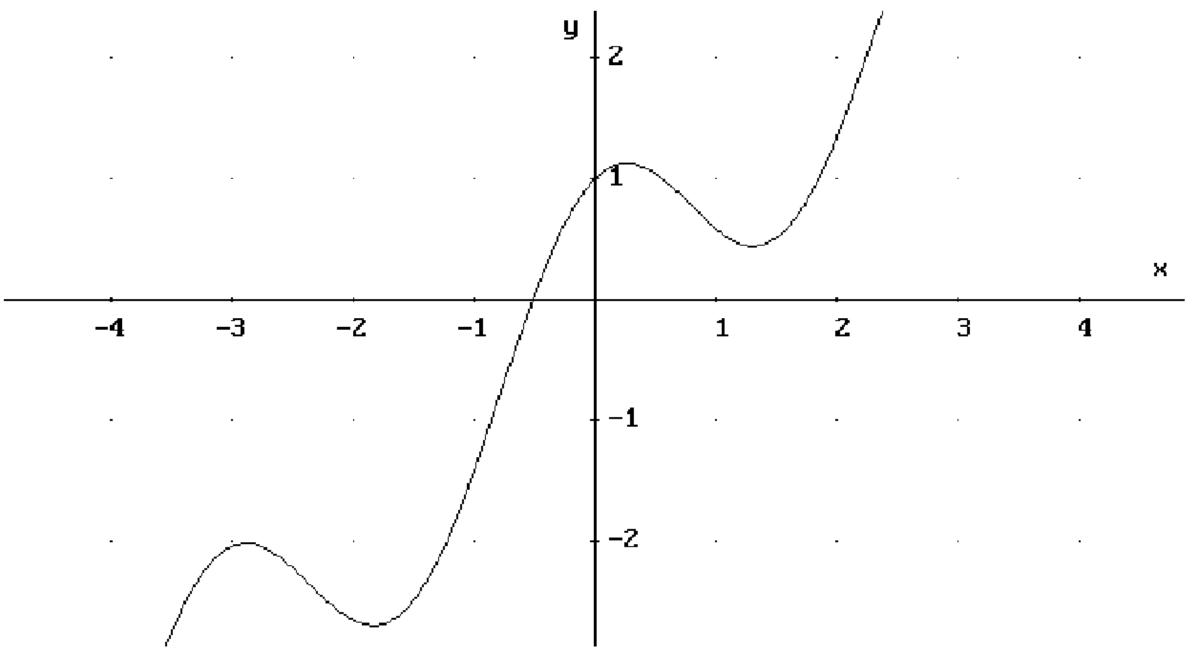
Bestimmen Sie das *absolute Maximum* und das *absolute Minimum* der Funktion

$$f(x) = x + \cos(2x)$$

auf dem Intervall

$$0 \leq x \leq 2.$$

Bemerkung: Der Graph der Funktion $y = f(x) = x + \cos(2x)$ sieht insgesamt („global") etwa so aus:



Taylorpolynome ("Crash course")

Grundgedanken:

- Komplizierte Funktionen $y = f(x)$ werden (*näherungsweise*) durch einfache ersetzt, nämlich durch Polynome $(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$.
- Die Näherung soll in der Umgebung einer bestimmten Stelle $x = a$ möglichst präzise sein.

Schon bekannt: Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$:

$$y - \underbrace{b}_{f(a)} = f'(a)(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{p_1(x)\ \text{(lineares Polynom)}}$$

Dies ist bereits das Taylorpolynom 1. Grades $p_1(x)$ mit der Entwicklungsstelle $x = a$!

Klarerweise gilt: $\boxed{f(a) = p(a)}$ und $\boxed{f'(a) = p_1'(a)}$. (Begriff der Tangente!)

Dies gilt allgemeiner auch für jedes quadratische Polynom

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2 \,.$$

Denn $\qquad p_2'(x) = f'(a) + 2c_2(x-a) \quad \Rightarrow \quad p_2'(a) = f'(a)\,.$

- Frage: Wie muß c_2 gewählt werden, damit auch $\boxed{p_2''(a) = f''(a)}$ gilt?

$$\rightarrow \quad p_2''(x) = 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \tfrac{1}{2}p_2''(x) = \tfrac{1}{2}p_2''(a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = \tfrac{1}{2}f''(a)}$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}$$

Taylorpolynom 2. Grades $p_2(x)$ mit der Entwicklungsstelle $x = a$

Allgemein (vgl. Skriptum):

Taylorpolynom n-ten Grades $p_n(x)$ mit der Entwicklungsstelle $x = a$

$$\boxed{p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n}$$

$$(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$

(10) Taylorpolynome.

(a) Wir suchen *Näherungsformeln* für die Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ "für kleines x", d.h. in der Nähe von $x = 0$.
Konkret: Bestimmen Sie die Taylorpolynome $p_1(x)$ und $p_2(x)$ zur Entwicklungsstelle $a = 0$. Berechnen Sie zum Vergleich die Werte $f(0.2)$, $p_1(0.2)$, $p_2(0.2)$, sowie $f(-0.1)$, $p_1(-0.1)$, $p_2(-0.1)$.

(b) Ebenso soll die Funktion $y = f(x) = \log_2 x$ [Logarithmus zur Basis 2; Bedeutung in der theoretischen Informatik!] in der Umgebung der Stelle $a = 2$ approximiert werden.
Bestimmen Sie die entsprechenden Taylorpolynome der Grade 2 und 3 !
Berechnen Sie zum Vergleich die Werte $f(1.8)$, $p_2(1.8)$, $p_3(1.8)$, sowie $f(2.1)$, $p_2(2.1)$, $p_3(2.1)$.

(c) Es soll die Gleichung $\cos x = x$ näherungsweise gelöst werden. (Vgl. Übungsaufgabe 20 a: Dort wurde nach Newton $x_0 = 0.7391$ errechnet.)

Ersetzen Sie hier $\cos x$ durch das quadratische Taylorpolynom zu $a = 0$ [reichlich grob!] und lösen Sie die entstehende Gleichung nach x.

(d) Gegeben sei die Gleichung

$$e^{-x} = 2x\,.$$

Welche ganze Zahl a liegt ihrer Lösung am nächsten?

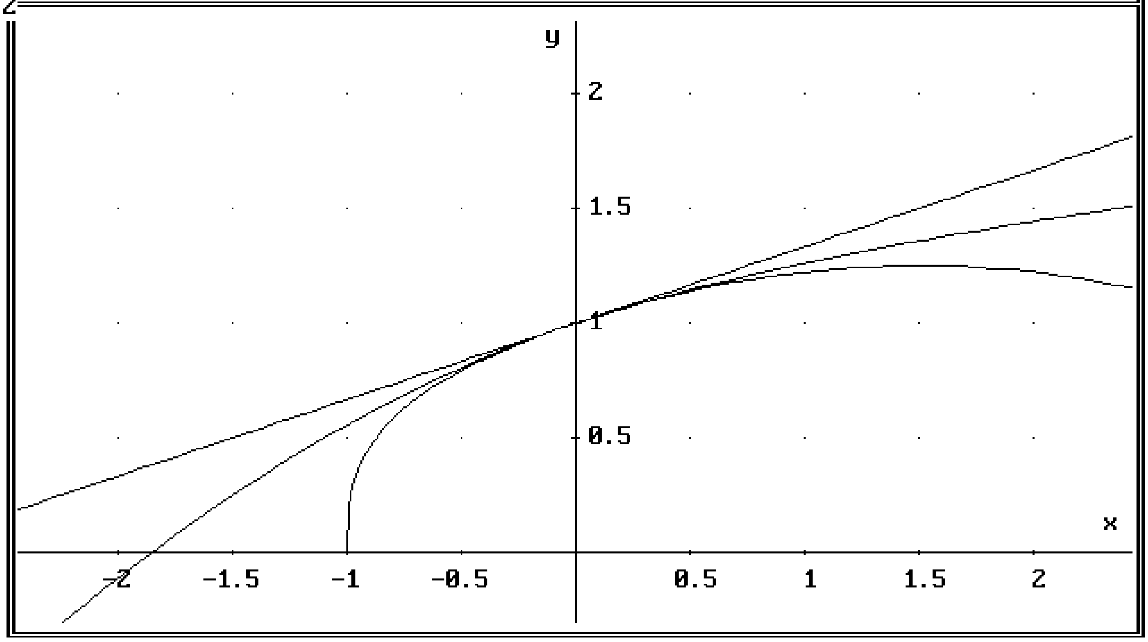
Bestimmen Sie das quadratische Taylorpolynom der linken Seite e^{-x}, entwickelt an der Stelle a.

Berechnen Sie daraus *näherungsweise* die Lösung der Gleichung. (Der "exakte" Wert lautet $x_0 = 0.3517337\ldots$)

1

#8: $\left[(1 + x)^{1/3}, p1(x), p2(x)\right]$

2



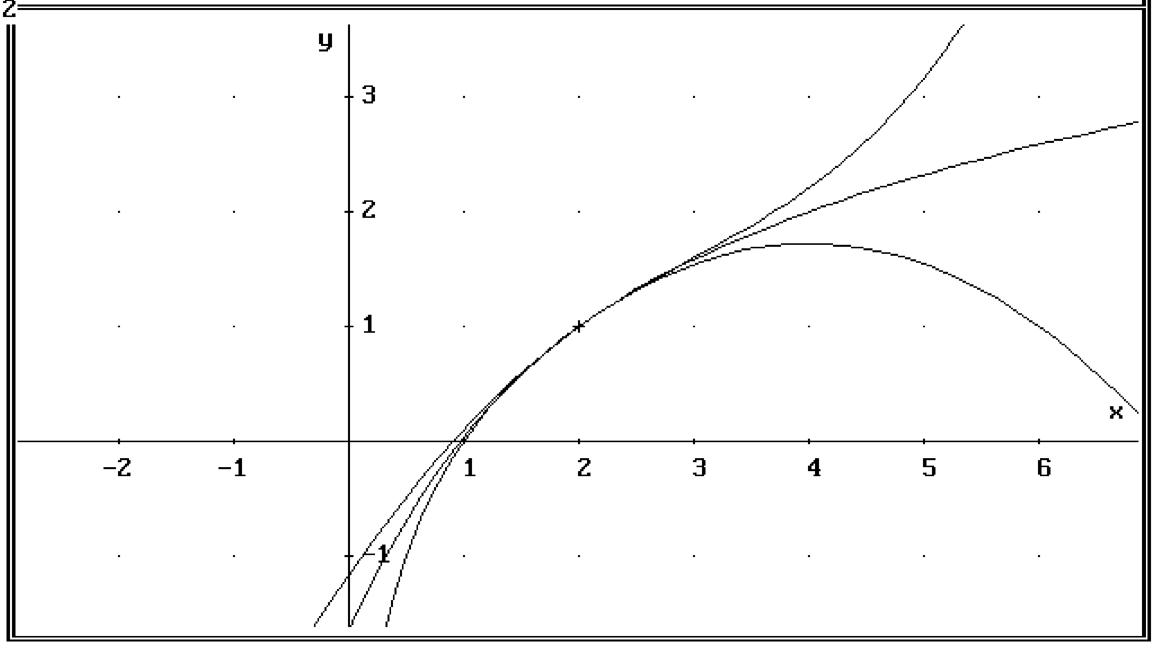
TRANSFER PRINT SCREEN: Printer File Options

Enter option | Derive XM
User | Free:100% | Algebra

1

#14: [LOG(x, 2), p2(x), p3(x)]

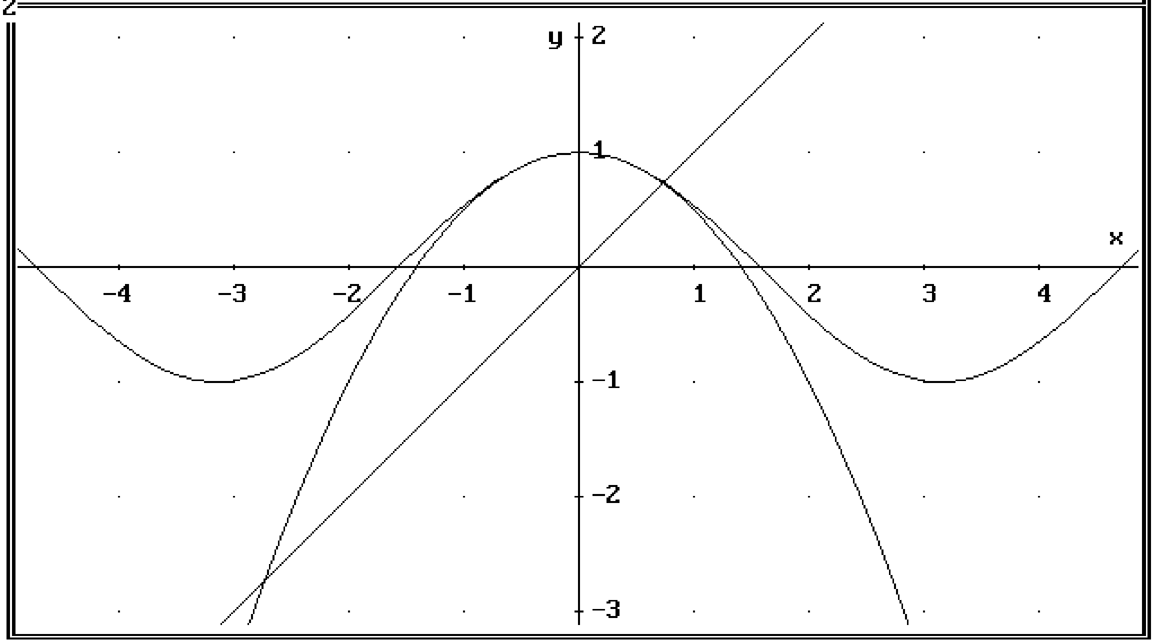
2



TRANSFER PRINT SCREEN: Printer File Options

Enter option | Derive XM
User | Free:100% | Algebra

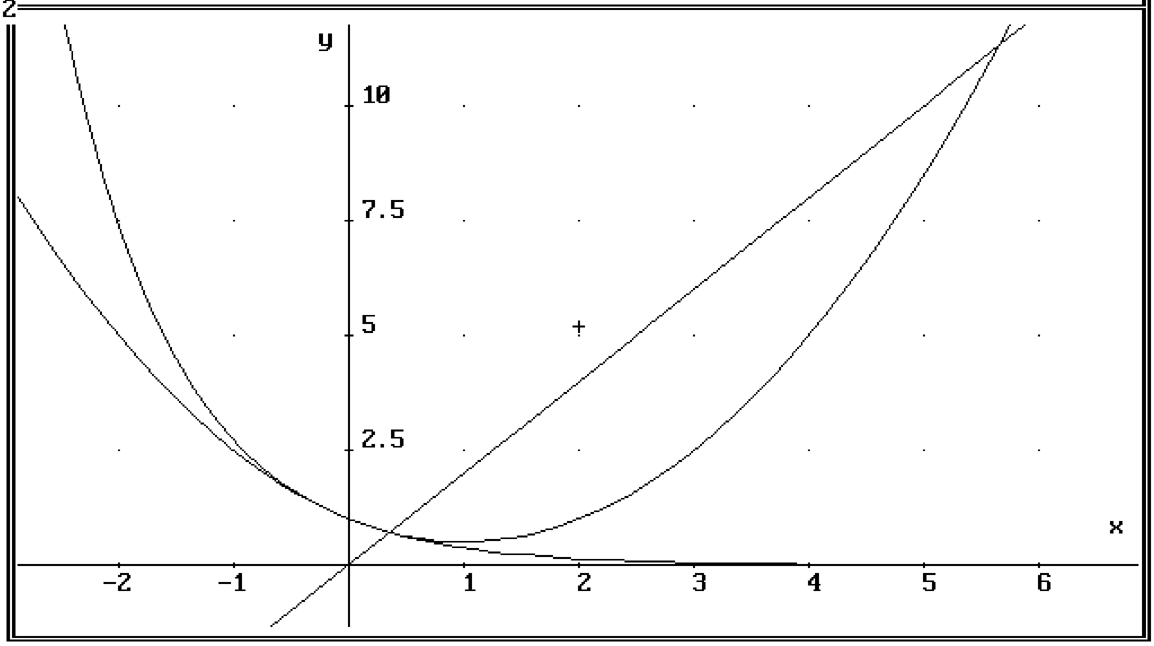
#1: $\left[\cos(x),\ 1 - x^2/2,\ x\right]$



TRANSFER PRINT SCREEN: Printer File Options

Enter option | Derive XM
User | Free:100% | Algebra

#1: $\left[\hat{e}^{-x},\ 1 - x + x^2/2,\ 2x\right]$



TRANSFER PRINT SCREEN: Printer File Options

Enter option | Derive XM
User | Free:100% | Algebra

(10 e) Die Funktion

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}$$

soll in der Nähe der Stelle $x = 1$ durch Polynome angenähert werden.

- Bestimmen Sie das *lineare* und das *quadratische* Taylorpolynom von $f(x)$ zur Entwicklungsstelle $a = 1$.
- Berechnen Sie zur Veranschaulichung der Approximation die Werte $\left(f(0.9), p_1(0.9), p_2(0.9) \right)$ und $\left(f(1.1), p_1(1.1), p_2(1.1) \right)$.

Integralrechnung

(11) Stückweise lineare Funktionen. (a) Der momentane (tägliche) Umsatz U einer bestimmten Firma werde als Funktion der Zeit t durch

$$U = f(t) = \begin{cases} 3+t & \text{für } 0 \leq t \leq 1\,, \\ 2+2t & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

beschrieben.

(Einheiten: Jahre bzw. $10^?$ Euro. Zum Zeitpunkt $t = 1$ wird eine neue, verbesserte Marketing-Strategie begonnen.)

(i) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $U = f(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq 2$.

(ii) Der <u>Gesamtumsatz</u> G in dieser Zeitspanne (erste 2 Jahre) errechnet sich als das Integral

$$G = \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bestimmen Sie seinen Wert direkt mit Hilfe der Definition (*Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen*) durch elementargeometrische Überlegungen.

["Profis" können natürlich zur Kontrolle mittels ihrer Schulkenntnisse das Integral als $\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ ausrechnen.]

(b) Die Geschwindigkeit v eines Radfahrers wird als Funktion der Zeit t durch

$$v = f(t) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq t \leq 3\,, \\ 20-5t & \text{für } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

dargestellt.

(Einheiten: Meter, Sekunden. Zum Zeitpunkt $t = 3$ wird eine Notbremsung eingeleitet.)

(i) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $v = f(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq 4$. ("*Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm*")

(ii) Der in diesem Zeitintervall (4 Sekunden) insgesamt zurückgelegte Weg W ist gleich dem Integral

$$W = \int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bestimmen Sie seinen Wert wieder direkt mit Hilfe der Definition.

(12) Auswertung bestimmter Integrale mittels Stammfunktionen.

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x \, .$$

(Inhalt des Flächenstücks unter der Kurve $y = \sin x$, von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$.)

- Suchen Sie zunächst eine *Stammfunktion* $F(x)$ von $f(x) = \sin x$, sodaß also gilt: $F'(x) = \sin x$.
- Nach dem *Fundamentalsatz* folgt dann:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) =: \quad F(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, .$$

(b) Berechnen Sie ebenso

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) \mathrm{d}x \, .$$

- Wie lauten hier die Stammfunktionen? Schreiben Sie dieses Ergebnis zunächst als "*unbestimmtes Integral*" an.
- Verwenden Sie wieder den Fundamentalsatz, um das gegebene bestimmte Integral auszuwerten.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \, .$

- Wie kann man dieses Resultat mit einem Flächeninhalt in Verbindung bringen?

(d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \, .$

- Für welche Funktion $F(x)$ gilt $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$?

(13) Integrationen mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\boxed{\int f\left(g(x)\right) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u\,, \qquad \text{wobei} \qquad u = g(x)} \qquad (*)$$

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int (\sin x)^2 \cos x\,\mathrm{d}x$ durch Substitution.

- Was sind hier die Funktionen $f(u)$ und $g(x)$ im Sinn der obigen Formel?
- Verwenden Sie das Ergebnis, um das *bestimmte* Integral

  $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \cos x\,\mathrm{d}x$ auszuwerten.

(b) Berechnen Sie ebenso $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$

- Was sind jetzt $f(u)$ und $g(x)$?

  [Genau genommen muß hier ein konstanter Faktor passend ergänzt werden!]
- Werten Sie damit das bestimmte Integral $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ aus.

(c) Was erhält man, wenn man in der Substitutions-Regel (*) speziell

$\boxed{f(u) = \frac{1}{u}}$ und $g(x)$ beliebig wählt?

- Benützen Sie die entstehende Formel $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + C\,,$

um das Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$ auszuwerten.

- Berechnen Sie ebenso $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\,\mathrm{d}x\,.$

~~(13)~~ Praktische Schreibweise bei der Anwendung der Substitution

$$\int f\left(g(x)\right) \boxed{\; g'(x)\,\mathrm{d}x \;} = \int f(u) \boxed{\; \mathrm{d}u \;} \qquad \text{mit} \qquad u = g(x)$$

Merkhilfe, "Eselsbrücke":

$$\text{"}\; g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \;\text{"} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \;} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{"}\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)} \;\text{"}$$

(a) Berechnen Sie durch Substitution

$$\int \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und damit} \qquad \int_0^3 \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) Berechnen Sie ebenso $\quad \int \cos(3x)\,\mathrm{d}x\,.$

(14) Partielle Integration ("Produktregel")

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

(a) Berechnen Sie durch partielle Integration $\displaystyle\int x \cos x \,\mathrm{d}x\,.$

(b) Berechnen Sie ebenso $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$

(Zunächst das *unbestimmte* Integral!)

(c) Berechnen Sie $$\int\limits_1^2 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) \, \ln x \, \mathrm{d}x \, .$$

(d) Berechnen Sie $$\int\limits_2^4 \ln x \, \mathrm{d}x \, .$$

Hinweis: $$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, \mathrm{d}x \, .$$

(15) Numerische Integration. Das Integral $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ ist <u>nicht</u> elementar mittels einer Stammfunktion auswertbar. Berechnen Sie einen *Näherungswert,* indem Sie $\sin x$ durch das *kubische Taylorpolynom* zur Entwicklungsstelle $a = 0$ ersetzen.

(15 b) Das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

ist nicht elementar mittels einer Stammfunktion auswertbar. Berechnen Sie einen *Näherungswert* dafür, indem Sie den Integranden $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$ durch das quadratische Taylorpolynom mit der Entwicklungsstelle $a = 0$ ersetzen.

Funktionen in mehreren Variablen

(17) Partielle Ableitungen.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy + 3y^2}\,.$$

(b) Berechnen Sie ebenso die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

der Funktion

$$w = f(x, y, z) = e^{-x} \sin(yz) + \sqrt[3]{x} \cos z + \frac{1}{y} \ln z\,.$$

(17 c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T an die Fläche

$$F: \qquad z = f(x, y) = \sqrt{24 - 2x^2 + 2xy - 3y^2}$$

mit dem Berührungspunkt $P = (2, -1, c) \in F$.

(17 d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$F: \quad z = f(x,y) = \ln(4x - 5y)$$

im Punkt $P = (4,3,c) \in F$.

(18) Extremwerte von Funktionen in zwei Variablen.

(a) Bestimmen Sie das (einzige) Extremum der Funktion

$$z = f(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2 + 6x + 8y\,.$$

Hinweis: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ und lösen Sie das (lineare) Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

*Ist dieses Extremum ein (globales) Maximum oder Minimum?
(Was passiert für große Werte von x, y?)

(b) Anwendungsaufgabe 1. Ein Wasserbehälter soll die Form einer quaderförmigen (nach oben offenen) Wanne aus Kunststoff mit vorgegebenem Fassungsvermögen V haben. Wie sind die Seitenlängen x, y, z zu wählen, damit der Materialverbrauch (Wandfläche) möglichst klein wird?

(c) Anwendungsaufgabe 2. Die leistungssteigernde Wirkung W einer sog. *Nahrungmittelergänzung* für Spitzensportler ist als Funktion der Zeit t nach der Einnahme (in Stunden) und der Dosis x (in Einheiten) durch die Funktion

$$W = x^2(a - x)\, t^2 e^{-t}$$

gegeben (a jene Dosis, ab der infolge Überdosierung keine Leistungssteigerung mehr eintritt). Wie sind die Menge x_0 und zeitliche Abstand t_0 zum Wettkampf zu wählen, um optimale Wirkung zu erzielen?